

Atvirkštinės funkcijos*

Ričardas Juozas Kudžma

Matematikos institutas, Vilniaus universitetas
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva
El. paštas: ricardas.kudzma@mif.vu.lt

Įteiktas 2025 rugsėjo 9; publikuotas 2025 gruodžio 10

Santrauka. Prieš 23 metus žurnale *Alfa plus omega* [7] tvirtinau, kad atvirkštinės funkcijos dėstymas ir grafiko braižymas naujame TEV leidyklos vadovėlyje [14] yra klaidingas. Vadovėlio autorių grupės vadovas V. Stakėnas atsakė, kad tai ne klaidingas, bet tradicinis požiūris [15]. Diskusija neišsivystė. Šiame straipsnyje siūlau atskirti funkcijos ir lygties žymenis – funkcija $f: x \mapsto f(x)$, o $y = f(x)$ – tik lygtis. Tai gali padėti išspręsti, atrodo, nesutaikomus požiūrius į atvirkštinę funkciją ir jos grafiką. Taip pat vystau idėją, kad funkcijos f grafikas yra ir atvirkštinės funkcijos g grafikas kitoje koordinačių sistemoje.

Raktiniai žodžiai: funkcijos apibrėžimas; funkcijos žymėjimas; funkcijos grafikas; atvirkštinė funkcija; koordinačių sistema

AMS: 97F50; 97D40; 97C30

1 Įvadas

Mokykloje funkcija apibrėžiama kaip taisyklė, kuri vienos aibės elementams priskiria kitos aibės elementus ir žymima: funkcija $y = f(x)$ (žr. [4, 10 psl.]). Istorija prasidėjo nuo apibrėžimo [14] 132 psl.

Apibrėžimas. Tegu funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritis yra aibė X , o reikšmių sritis – aibė Y , be to, ši funkcija skirtingoms x reikšmėms priskiria skirtingas y reikšmes. Taisyklė, kuri kiekvienai reikšmei $y \in Y$ priskiria reikšmę $x \in X$, su kuria $f(x) = y$, vadinama funkcija, atvirkštine funkcijai $f(x)$.

Jei funkcija $y = f(x)$ turi atvirkštinę, tai kintamasis y yra atvirkštinės funkcijos nepriklausomas kintamasis, o x – priklausomas kintamasis, todėl atvirkštinę funkciją

* Už brėžinius ir konvertavimą į L^AT_EX dėkoju kolegai Martynui Sabaliauskui.

galima žymėti taip: $x = g(y)$. „Tačiau kintamuosius galime žymėti ir kitaip, funkcija (reikšmių priskyrimo taisyklė) išliks ta pati.“

Tada sukeičiami vietomis kintamieji x su y ir „abiejų funkcijų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ grafikus galima nubraižyti toje pačioje koordinatinių plokštumoje“ (citata iš [14, 132 psl.]). Tie grafikai simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu.

R. Kudžmos didelis priekaištas [7, 8] buvo, kad gerame apibrėžime nėra parašyta pagrindinė atvirkštinės funkcijos sąlyga algeбриškai $f(g(y)) = y$ su visais $y \in Y$. Jei ji neparašyta, tai ir nėra tikrinama.

Prieš 20 metų NORMA 2005 konferencijoje islandė K. Bjarnadottir [3] išdėliojo žodį *suprasti* įvairiomis kalbomis į eilę: *skilja* – islandiškai (senoviškai) *skelti*, *unders-tand* angliškai *stovėti šalia*, *stovėti po*, *verstehen* vokiškai, *comprendre* prancūziškai *paimti kartu*, *comprehend*. Natūralu manyti, kad supratimas yra procesas ir įvairiomis kalbomis žodis *suprasti* reiškia tam tikrą to proceso fazę. Į žodį *skelti* pagal prasmę panašus žodis *atskirti*.

Daug metų Lietuvoje, ir ne tik, dešimtaine trupmena buvo vadinama $3/10$ ir $0,3$. Dešimtainio skaičiaus sąvoka (žr. R. Kudžma [9]) atskyrė šitą sudvejinimą: $3/10$ – tai trupmena, jei reikia – dešimtainė trupmena, $0,3$ – dešimtainis skaičius. Žinoma, dešimtainio skaičiaus sąvoka yra daug daugiau, nei tik $0,3$.

R. Norvaiša [13] daug dėmesio skyrė trupmenų dėstymui. Vadovėliuose du skirtingi apibrėžimai būdavo suveliami į vieną. R. Norvaiša akcentavo tų apibrėžimų atskyrimą. Tą temą vėliau ir aš (žr. R. Kudžma [11, 12]): *dalys*, *dalys* – trečdalis, du trečdaliai vs *dalmuo* – $2 : 3$, sujungia trupmena $2/3$.

Lietuviškuose vadovėliuose lygybė $y = f(x)$ suprantama kaip funkcijos apibrėžimas ir kaip lygtis. Natūralu šias sąvokas atskirti. Tai labai gražiai išdėstyta prancūziško 10 klasės vadovėlio [1] Žodynėlio II puslapyje, t. y. pačioje vadovėlio pradžioje.

$f: x \mapsto f(x)$ arba $f: x \mapsto y$ yra funkcija, kuri (realiajam) x priskiria $f(x)$ arba y . $f(x)$ yra realiojo x vaizdas.

$D(f)$ yra funkcijos f apibrėžimo sritis.

$\mathcal{C}_f$ funkcijos f grafinė reprezentacija ar reprezentacinė kreivė. Tai aibė taškų su koordinatėmis $(x; y)$, kur $x \in D(f)$ ir $f(x) = y$.

$y = f(x)$ yra kreivės $\mathcal{C}_f$ lygtis.

Tirdami funkcijas susiduriame su trijų rūšių objektais: funkcijomis, kreivėmis ir lygtimis.

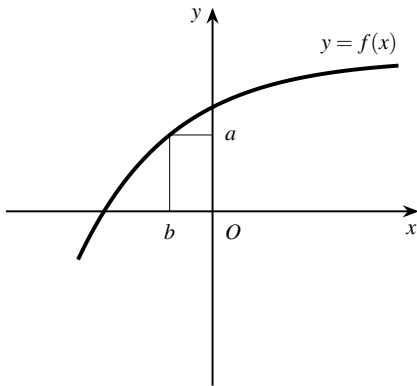
2 Grafikų pavyzdžiai

1. Pateiksime keletą pavyzdžių, kaip skirtingi autoriai braižo atvirkštinių funkcijų grafikus. Pradėsime nuo A. Kolmogorovo (žr. [6]) vadovėlio, iš kurio Lietuvos moksleiviai mokėsi paskutiniaisiais sovietmečio metais bei Nepriklausomybės pradžioje. Pacituosime teiginį apie atvirkštinės funkcijos grafiką, psl. 189:

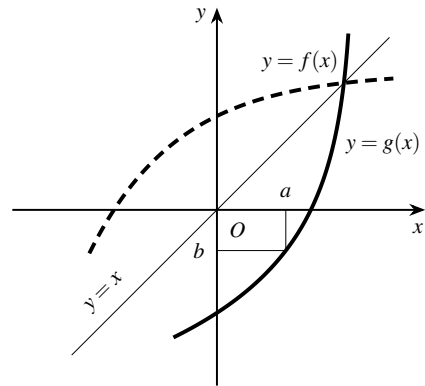
Funkcijos f atvirkštinės funkcijos g grafikas yra simetriškas f grafikui tiesės $y = x$ atžvilgiu.

Irodykime šią savybę. Visų pirma iš funkcijos f grafiko galima grafiškai rasti funkcijai f atvirkštinės funkcijos g grafiko reikšmę bet kuriame taške a . Reikia vertikaloje ašyje (o ne horizontalioje, kaip įprasta) pažymėti tašką, kurio koordinatė a (135 pav.). Iš atvirkštinės funkcijos apibrėžimo išplaukia, kad reikšmė $g(a)$ lygi b (žr. 135 pav.).

Vadinasi, parinkus truputį neįprastą koordinatinių sistemą (argumentas žymimas vertikaloje ašyje, o funkcijos reikšmės – horizontalioje ašyje), galima sakyti, kad funkcijai f atvirkštinės funkcijos g grafikas – tai funkcijos f grafikas (įprastinėje koordinatinių sistemoje). Norint pavaizduoti funkcijos g grafiką įprastinėje koordinatinių sistemoje, reikia funkcijos f grafiką atvaizduoti simetriškai tiesės $y = x$ atžvilgiu (136 pav.).



135 pav.



136 pav.

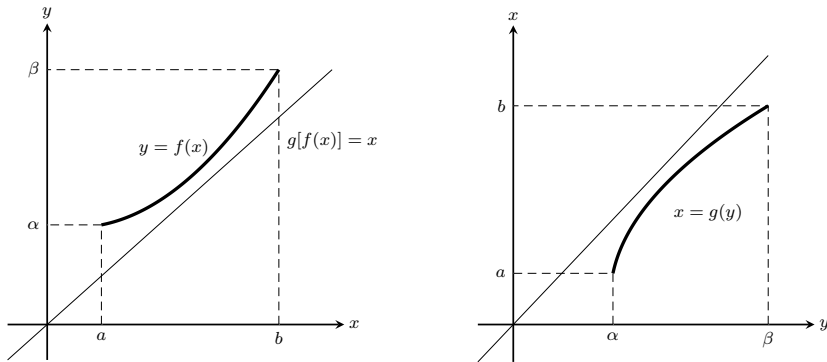
1 pav. A. Kolmogorovas ir A. Abramovas [6, 189 psl.].

Tekste pabrėžta, kad į funkcijos f grafiką galima žiūrėti ir kaip į atvirkštinės funkcijos grafiką, bet toliau tai užmirštama ir pereinama prie „tradicinio požiūrio“, t. y., abiejų funkcijų grafikai braižomi vienoje koordinatinių sistemoje.

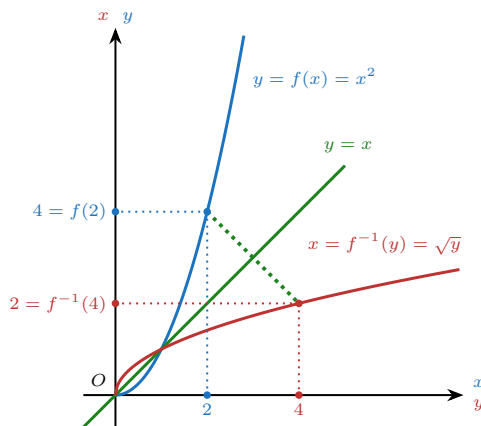
2. Kitas pavyzdys L. Berso [2] amerikietiškas matematinės analizės (Calculus) vadovėlis. Autorius funkciją žymi $x \mapsto f(x)$, bet rašo, kad kartais funkcijos reikšmės priskiriamas kintamasis y , tada žymima $x \mapsto y = f(x)$ arba trumpiau $y = f(x)$. Pateikiamas atvirkštinės funkcijos grafiko pavyzdys iš 131 psl.

Paveikslas rodo, kad autorius funkcijos $y = f(x)$ atvirkštinę funkciją supranta kaip $x = g(y)$, o ne $y = g(x)$. Funkcijos g grafikas, aibė taškų su koordinatėmis $(y; g(y))$, gaunamas atvaizduojant simetriškai tiesės $y = x$ atžvilgiu ne tik pačią kreivę, bet ir koordinatinių ašis.

3. Modernesnės technologijos leidžia sujungti šių dviejų pavyzdžių grafikus į vieną naudojant dvi spalvas. Žiūrint į Ė. Delabaere ir N. Raymond [5] tiesioginės ir atvirkštinės funkcijų grafikus, galima sakyti, kad tai 2 pav. grafikai, sudėti vienas ant kito, tik kairysis mėlynas, o dešinysis raudonas.



2 pav. L. Bers [2, 131 psl.] iš rusiško leidimo



3 pav. É. Delabaere, N. Raymond [5, 61 psl.].

3 Farenheito ir Celsijaus temperatūrų skalė

Panagrinėsime konkretų pavyzdį – sąryšį tarp Celsijaus $^{\circ}\text{C}$ ir Farenheito $^{\circ}\text{F}$ temperatūros matavimo skalių (toliau laipsnių ženkliuko nerašysime). Jas sieja tiesinis ryšys – vandens užšalimo $C = 0$, $F = 32$ ir virimo temperatūrose $C = 100$, $F = 212$. Per du taškus brėžiame tiesę ir parašome jos lygtį:

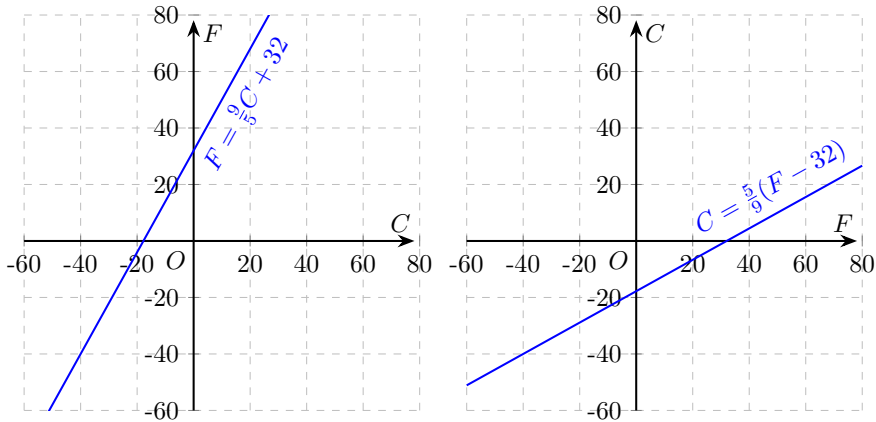
$$\frac{C - 0}{100 - 0} = \frac{F - 32}{212 - 32},$$

$$\frac{C}{100} = \frac{F - 32}{180}, \quad \frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9}.$$

Po elementarių pertvarkymų gauname ekvivalenčias lygtis (F ir C sprendinius):

$$\frac{9}{5}C + 32 = F \quad \text{ir} \quad \frac{5}{9}(F - 32) = C.$$

Visos šios lygtys reiškia tą pačią tiesę. Galime jas nubrėžti skirtingose koordinatinių plokštumose.



4 pav. Temperatūrų skalių ryšys skirtingose koordinatinių plokštumose.

Užrašai prie tiesių yra tų tiesių lygtys, bet tokios, kad galima parašyti funkcijas, kurių grafikai yra atitinkamos tiesės. Kairioji tiesė yra funkcijos $f: C \mapsto \frac{9}{5}C + 32$ grafikas, dešinioji – funkcijos $g: F \mapsto \frac{5}{9}(F - 32)$ grafikas, t.y. aibės taškų su koordinatėmis $(C; f(C))$ ir $(F; g(F))$ atitinkamai.

Du grafikai dažniausiai ir būdavo braižomi amerikietiškuose Calculus vadovėliuose. Funkcijos f ir g yra viena kitai atvirkštinės, nes

$$f(g(F)) = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{9}(F - 32) + 32 = F \quad \text{su visais } F \in \mathbb{R} \text{ ir}$$

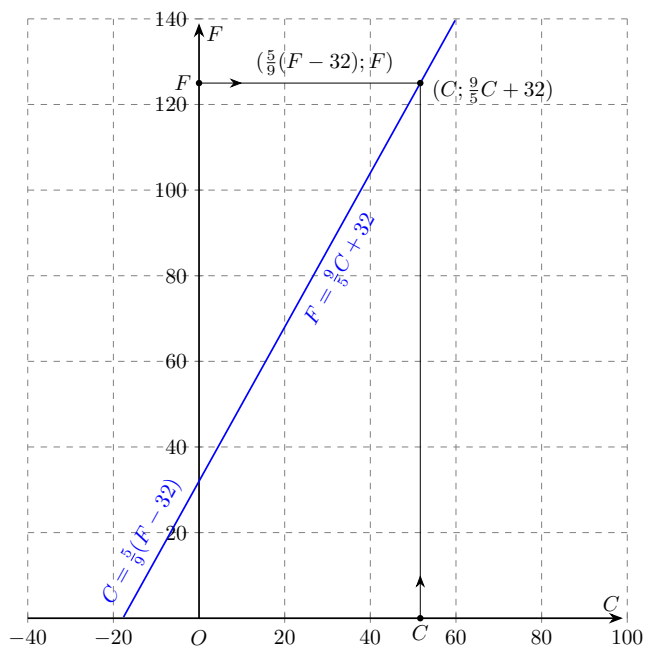
$$g(f(C)) = \frac{5}{9} \left(\frac{9}{5}C + 32 - 32 \right) = C \quad \text{su visais } C \in \mathbb{R}$$

(nekreipsime dėmesio į fizikinius temperatūrų apribojimus).

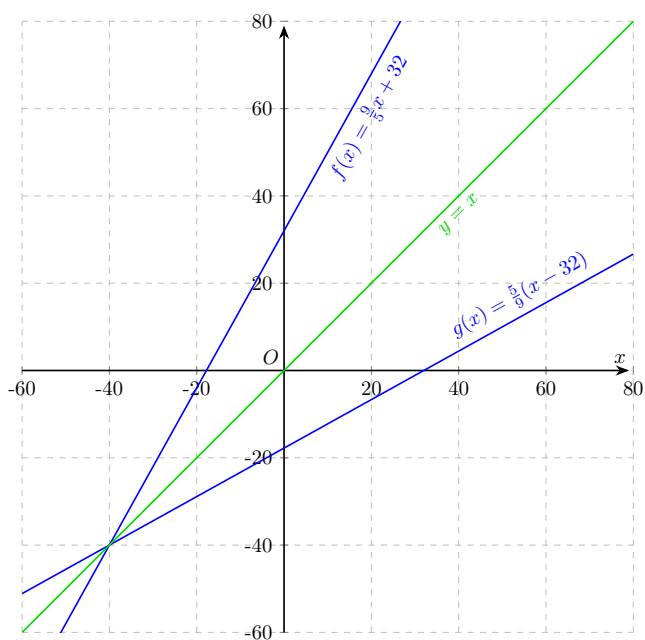
Tačiau du brėžiniai nereikalingi, užtenka vieno. Pasirenkame koordinatinių sistemą OCF ir nubrėžiame funkcijos f grafiką (5 pav.). Stebėtojas iš abscisių ašies taško su koordinatėmis $(C; 0)$ mato tiesės tašką $(C; \frac{9}{5}C + 32)$ arba funkcijos f grafiko tašką $(C; f(C))$. Parašome tiesės lygtį $\frac{9}{5}C + 32 = F$. Galime prirašyti ir ekvivalenčią lygtį $\frac{5}{9}(F - 32) = C$. Tada stebėtojas iš ordinačių ašies taško $(0; F)$ – mato tiesės tašką su koordinatėmis $(\frac{5}{9}(F - 32); F)$ arba $(g(F); F)$. Bet stebėtojas, būdamas ordinačių ašyje OF , pozicionuoja (renkasi) koordinatinių sistemą OFC ir tiesė šioje koordinatinių sistemoje yra taškai su koordinatėmis $(F; g(F))$. Todėl A. Kolmogorovas ir vadina tą tiesę funkcijos g grafiku, tiesa, OFC koordinatinių sistemoje.

Išmaniojo telefono skaičiuotuve pasirinkime *Vienetų keitiklis / temperatūra*. Galime vienoje eilutėje pasirinkti Celsijaus laipsnius C (atitiktų abscisių ašį), kitoje Farenheito F (atitiktų ordinate). Skaičiuotuve galima aktyvuoti C arba F , tai 5 pav. atitiktų koordinatinių sistemos OCF arba OFC pasirinkimą.

Galima šitą pavyzdį nagrinėti ir kitaip. Sakykime, $f: x \mapsto f(x) = \frac{9}{5}x + 32$, $g: x \mapsto g(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$. Teisingos sąlygos $f(g(x)) = x$ ir $g(f(x)) = x$ su visais realiaisiais x . Vadinas, funkcijos f ir g yra viena kitai atvirkštinės funkcijos. Vienoje plokštumoje (6 pav.) galima pavaizduoti aibės taškų su koordinatėmis $(x; f(x))$ ir $(x; g(x))$, t.y. abiejų funkcijų grafikus. Pastebėsime, kad naudojome tik vieną kintamąjį x .



5 pav. Viena kreivė – du grafikai.



6 pav. Tradicinis atvirkštinių funkcijų grafikų vaizdavimas.

4 Atvirkštinės trupmenos

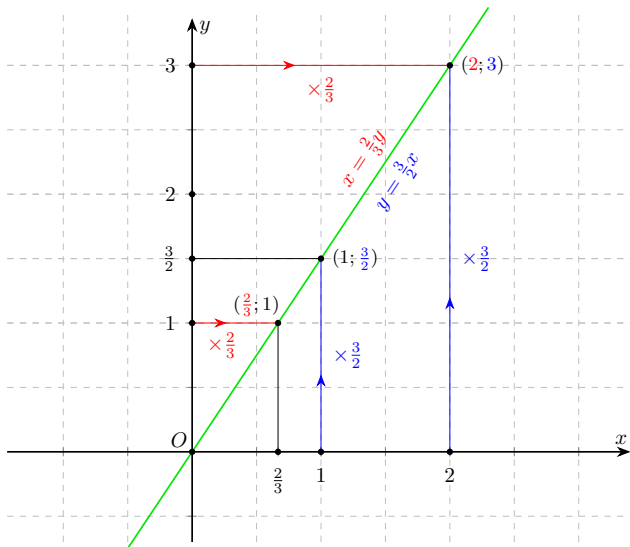
Gyvenimas pilnas pavyzdžių, kai žiūrint į objektą iš skirtingų pusių, matomi skirtingi ženklai. Tokia filosofija paremti mano matematiniai ženklai iš akmenų (žr. [10, 11]). Kompozicijoje iš akmenų 7 pav. kairėje užkoduoti veiksmai: dalyba iš 2 (raudona), daugyba iš 3 (mėlyna spalva) ir daugyba iš trupmenos $3/2$ (mėlyna). Žiūrint į kompoziciją iš kitos pusės, 7 pav. dešinėje, matome užkoduotus atvirkštinius veiksmus: dalybą iš 3, daugybą iš 2 ir dalybą iš $3/2$ arba daugybą iš atvirkštinės trupmenos $2/3$. Atėjome prie atvirkštinių trupmenų, atvirkštinių veiksmų, atvirkštinių funkcijų.



7 pav. Daugyba iš $3/2$ ir $2/3$ akmenų modelyje.

Sakykime, dviejų akmenų vertė yra x , o trijų – y . Tada $x : y$ kaip $2 : 3$ arba $x/y = 2/3$. Pastarąją proporciją (lygtį) galima parašyti ekvivalenčiomis lygtimis $y = \frac{3}{2}x$ arba $x = \frac{2}{3}y$. Šitos lygtys nusako funkcijas $f: x \mapsto \frac{3}{2}x = y$ ir $g: y \mapsto \frac{2}{3}y = x$.

Jei du akmenys reikš vienetą, $x = 1$, tai trys akmenys reikš $3/2$, $y = 3/2$. Jei vienetu bus trys akmenys, $y = 1$, tai $x = 2/3$, o $x = 2$ ekvivalentu $y = 3$. Visa tai galima matyti 8 pav. su viena kreive, kuri yra funkcijos f grafikas Oxy koordinatų sistemoje ir funkcijos g grafikas Oyx koordinatų sistemoje.

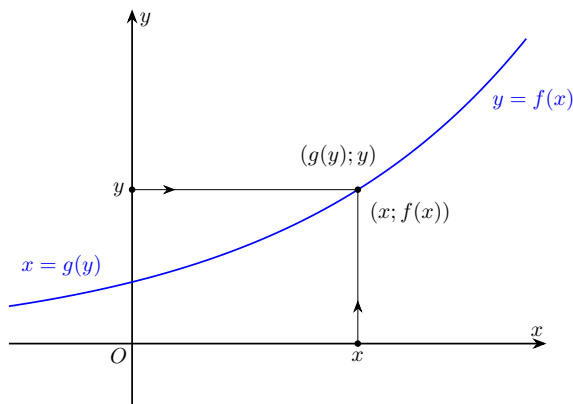


8 pav. Daugyba iš $3/2$ ir $2/3$ grafike.

Ką mes laimėtume, jei nubrėžtume funkcijų $f: x \mapsto f(x) = \frac{3}{2}x$ ir $g: x \mapsto g(x) = \frac{2}{3}x$ grafikus vienoje plokštumoje kaip 6 pav.?

5 Bendrasis atvejis

Analogišką procedūrą galima pakartoti bendruoju atveju. Sakykime, turime funkciją $f: x \mapsto f(x)$, apibrėžtą srityje $D(f)$ su reikšmių sritimi $E(f)$ ir turinčią atvirkštinę funkciją $g: y \mapsto g(y)$, apibrėžtą srityje $D(g) = E(f)$. Nubrėžiame funkcijos f grafiką, t. y., kreivę, kurios taškų koordinatės $(x; f(x))$, o lygtis $y = f(x)$. Išsprendę lygtį x -o atžvilgiu, gauname ekvivalenčią lygtį $x = g(y)$. Kreivės tašką galima užrašyti trimis būdais $(x; y) = (x; f(x)) = (g(y); y)$. Funkcijos f grafikas Oxy koordinačių sistemoje yra funkcijos g grafikas Oyx sistemoje. To galima primygtinai ir nereikalausti, bet iš x -ų ašies matome funkciją f , o iš y -ų ašies – funkciją g , f atvirkštinę.



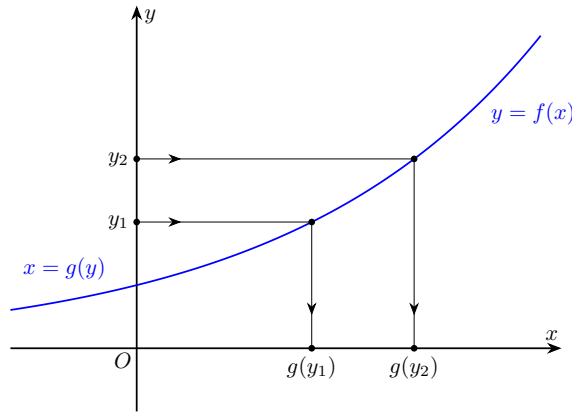
9 pav. Bendrasis atvejis, viena kreivė – du grafikai.

Atvirkštinės funkcijos g savybės (monotoniškumas, tolydumas, diferencijuojamumas) išvedamos iš pirmosios (tiesioginės) funkcijos f savybių. Paprasčiausiu atveju parodysime, kad vienos kreivės, pirminės funkcijos f grafiko, visiškai užtenka, kad gautume atvirkštinės funkcijos g norimas savybes. A. Kolmogorovo [6] vadovėlyje po teiginio apie atvirkštinės funkcijos grafiką įrodomas atvirkštinės funkcijos monotoniškumas.

Jei funkcija f didėja intervale I , tai atvirkštinė funkcija g , apibrėžta f reikšmių srityje, yra taip pat didėjanti.

Pirmasis įrodymo sakiny: Sakykime, x_1 ir x_2 – bet kokios reikšmės iš $E(f)$, $x_1 > x_2$. Pažymėkime $y_1 = g(x_1)$, $y_2 = g(x_2)$. Pagal atvirkštinės funkcijos apibrėžimą $x_1 = f(y_1)$ ir $x_2 = f(y_2)$. Prieš akis reikia turėti 136 pav. (1 pav.), kur funkcijų f ir g grafikai vienoje plokštumoje. Visiškai neaišku, kokiose ašyse reikia atidėlioti x_1 , x_2 , y_1 ir y_2 .

Su vienu grafiku viskas paprasčiau. Sakykime y_1 ir y_2 – bet kokios reikšmės iš $E(f)$ ir $y_1 < y_2$. Atidedame tuos du taškus y -ų ašyje, 10 pav. Surandame $g(y_1)$ ir $g(y_2)$ reikšmes x -ų ašyje. Brėžinyje matome, kad $g(y_1) < g(y_2)$, bet to nepakanka. Loginė įrodymo pabaiga kaip vadovėlyje. Tarus priešingai, gautume prieštarą sąlygai $y_1 < y_2$, nes $f(g(y_1)) = y_1$, $f(g(y_2)) = y_2$.



10 pav. Monotoniškumo įrodymas naudojant vieną kreivę.

6 Išvados

Funkcijos ir lygties žymenų atskyrimas leidžia atvirkštinės funkcijos ir jos grafiko dėstymą išdėlioti etapais.

1. Turime funkciją $f: x \mapsto f(x)$, apibrėžtą srityje $D(f)$ su reikšmių sritimi $E(f)$.
2. Koordinačių plokštumoje Oxy atidedame taškus su koordinatėmis $(x; f(x))$, t. y., brėžiame kreivę, funkcijos f grafiką.
3. Parašome kreivės lygtį $y = f(x)$.
4. Algebriskai ir (ar) geometriškai randame atvirkštinės funkcijos (kai ji egzistuoja) g reikšmę $g(y)$ kiekvienam $y \in E(f)$.
5. Įsitikiname sąlygų (lygčių) $y = f(x)$ ir $x = g(y)$ ekvivalentumu, kai $x \in D(f)$, $y \in E(f)$.
6. Tai leidžia kreivės taško koordinatas išreikšti skirtingais būdais $(x; y) = (x; f(x)) = (g(y); y)$.
7. Funkcijos f grafiką Oxy koordinatinių sistemoje nagrinėjame ir kaip atvirkštinės funkcijos g grafiką Oyx koordinatinių sistemoje (5, 8, 9, 10 pav.).
8. Jei nepatinka nepriklausomą kintamąjį turėti ordinačių ašyje, galima plokštumos transformacija $(a; b) \mapsto (b; a)$ pervesti jį į abscisų ašį, bet su kintamuoju y (2 ir 3 pav.).
9. Galima kintamąjį y pakeisti x ir pasakyti, kad funkcijų $f: x \mapsto f(x)$ ir $g: x \mapsto g(x)$ grafikai yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu, kas yra tiesa, bet prarandamas tiesioginis ryšys tarp pradinės funkcijos ir jos atvirkštinės (6 pav.).

Literatūra

- [1] J.-P. Beltramone, F. Boure, C. Merdy, C. Plas, R. Tosetti, F. Léon. *Déclic 2de Maths*. Hachette, Vanves, 2019.
- [2] L. Bers. *Calculus*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.

- [3] K. Bjarnadóttir. The concept of understanding in mathematics textbooks in Iceland. In C. Bergsten, B. Grevholm, H.S. Måsøval, F. Rønning(Eds.), *Relating Practice and Research in Mathematics Education: Proceedings of the 4th Nordic Conference on Mathematics Education (NORMA 2005)*, pp. 163–176. Tapir Academic Press, Trondheim, Norway, 2005.
- [4] V. Dabrišienė, M.M. Vosylienė, J. Zalubienė, kiti. *Matematika. Vadovėlis 11 klasei, II dalis*. Šviesa, Kaunas, 2016.
- [5] É. Delabaere, N. Raymond. Initiation á l’analyse. Paskaitų konspektas, n.d.
- [6] A. Kolmogorovas, A. Abramovas. *Algebra ir analizės pradmenys, 10–12*. Šviesa, Kaunas, 1991.
- [7] R. Kudžma. Atvirkštinė funkcija ir jos grafikas. *Alfa plius omega*, **3**(16):43–47, 2002.
- [8] R. Kudžma. Inverse function and semiotics. In *Teaching Mathematics: Retrospective and Perspectives, Proceedings of the 5th International Conference*, pp. 175–180, Liepaja, May 23–24, 2004.
- [9] R.J. Kudžma. Dešimtainės trupmenos ir dešimtainiai skaičiai. In *Lietuvos matematikų draugijos LXIV konferencijos santraukos*, p. 38, 2023.
- [10] R.J. Kudžma. Trupmenų anatomija. In *Lietuvos matematikų draugijos LXV konferencijos santraukos*, p. 38, 2024.
- [11] R.J. Kudžma. Grindys-lubos. <https://www.ricardasjkudzma.mif.vu.lt/zenklai/grindys-lubos>, 2025. Žiūrėta 2025-06-15.
- [12] R.J. Kudžma. Trupmenų anatomija. <https://www.ricardasjkudzma.mif.vu.lt/matematika/trupmenu-anatomija>, 2025. Žiūrėta 2025-06-15.
- [13] R. Norvaiša. Sąvokos, terminai ir simboliai matematikos vadovėliuose. *Liet. matem. rink. LMD darbai, Ser. B*, **64**:59–74, 2023.
- [14] A. Skūpas, E. Stankus, V. Stakėnas, V. Vitkus, K. Intienė. *Matematika 11, I dalis*. TEV, Vilnius, 2002.
- [15] V. Stakėnas. Atvirkštinė funkcija: tradicinis požiūris. *Alfa plius omega*, **3**(16):48–50, 2002.

SUMMARY

Inverse functions

R. J. Kudžma

23 years ago, R. Kudžma in the journal *Alfa plius omega* [7] argued that the TEV textbook [14] presents the inverse function and its graph incorrectly. The head of the textbook’s author group, V. Stakėnas [15], replied that this was not incorrect, but a traditional approach. The discussion did not develop. The separation of the function $f: x \mapsto f(x)$ and the equation $y = f(x)$ notations proposed in this article may help resolve the seemingly irreconcilable views on the inverse function and its graph. The idea is also developed that the graph of the function f in the original coordinate system Oxy is also the graph of the inverse function in Oyx coordinate system.

Keywords: function’s definition; function’s notation; graph of a function; inverse function; coordinate system